GEISTESWISSENSCHAFTLICHE RICHTLINIEN ZUR MATHEMATISCHEN BEHANDLUNG NATURWISSENSCHAFTLICHER PROBLEME.

DR. ERNST BLÜMEL.

Trotz der gewaltigen und ehrfurchtgebietenden Fülle mathematischer und geometrischer Wahrheiten, welche die größten Denker der Vergangenheit in rastlosem Eifer hervorgebracht haben, muß sich der unbefangene Naturwissenschafter der Gegenwart gestehen, daß jene kunstvollen Formen des Begreifens doch nicht imstande sind, den unermeßlichen Inhalt der Naturerscheinungen zu fassen oder gar zu erschöpfen. Er wird gewahr, daß diese Formen für diese Aufgabe nicht nur zu spröde und zu starr sind, daß alle bisherigen Versuche bloß Stückwerk, näherungsweises Herantasten an die wirkliche Gesetzmäßigkeit des Naturgeschehens sind, sondern daß überhaupt durch die übliche mathematische Behandlung der naturwissenschaftlichen Probleme eine innere Verbindung mit dem Inhaltvollen der Natur nicht im entferntesten angebahnt ist und daß dieses Inhaltvolle, wie eine Fata Morgana vor dem bloß äußeren formalen Begreifen scheu zurückweicht. Da drängt sich nun die Frage auf, ob nicht vielleicht eine Umgestaltung und Belebung jener bloß phoronomisch-mechanistischen Begriffsformen zu einem organischeren Erfassen der Naturtatsachen führen könnte, das dann vielleicht die Brücke zu einem inneren verständnisvollen Erleben derselben bilden würde.

Dazu ist vor allen Dingen nötig, sich klar zu machen, daß das mathematische Denken als solches eine dreifache Richtung, eine dreigliedrige Struktur hat, die aus der Umwandlung dreier, im jugendlichen Menschen organisierend wirkender Grundkräfte hervorgeht, indem nämlich nach dem siebenten Lebensjahre diese aufbauenden Kräfte sich in mathematisierende Bewußtseinskräfte verwandeln. (Näheres siehe die Vorträge Dr. Steiners vom ersten Hochschulkurs.)

Diese dreifache Gliederung der Mathematik äußert sich bereits sehr deutlich in den drei verschiedenen Möglichkeiten der einfachsten Beziehung zweier Größen a und b. Diese können nämlich gleich, entgegengesetzt oder reziprok zueinander sein, also:

$$1)\ a = b \text{ oder } 2)\ a = -b \text{ oder } 3)\ a = \frac{1}{b}.$$

Die zugehörigen drei Betrachtungsarten wollen wir nennen: Die Symmetrie, die Kontrarität und die Inversion.

Fasse ich also bei einer Gleichung wie z. B. $a = b$ die Tatsache ins Auge, daß die Größen a und b gleichwertig sind, also miteinander vertauscht werden können, oder betrachte ich die Gesetze der Vertauschbarkeit der Addition und Multiplikation nämlich $A + B = B + A$ und $A . B = B . A$, so habe ich das Prinzip der Symmetrie, also das der Gleichwertigkeit oder Vertauschungsmöglichkeit von links und rechts angewendet. Es tritt einem dieses, insbesondere räumliche Beziehungen ausdrückende Gesetz in den mannigfaltigsten Gestalten immer wieder entgegen und findet auch seinen sichtbaren organischen Ausdruck im Verhältnis von links und rechts beim menschlichen Körper.

Der Gegensatz der beiden Richtungen einer Geraden oder das Verhältnis der positiven zu den negativen Zahlen ist der klassische Ausdruck des zweiten Prinzipes. Es lebt sich darin das asymmetrische also auch unvertauschbare Verhalten der zeitlichen Beziehung von Vergangenheit und Zukunft aus und darf absolut nicht mit dem ersten Prinzip verwechselt werden. Dies ist in neuerer Zeit jedoch hinsichtlich der positiven und negativen Zahlen öfters geschehen, indem deren Verhältnis zueinander häufig als reine Korrelation (Entsprechung) bezeichnet und somit beiden Zahlgattungen die gleiche Stellung eingeräumt wurde. Verleitet wurde man dazu unter anderem durch die Versinnlichung der reellen Zahlen auf der Zahlenlinie, die scheinbar alle Merkmale der Symmetrie aufwies.

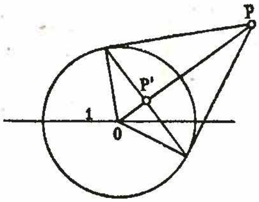
Daß hier jedoch keine Symmetrie vorliegt, erhellt schon daraus, daß das Produkt zweier negativer Zahlen nicht negativ ist, wie die Symmetrie es fordern würde, sondern positiv. Oder modern ausgedrückt:

$$\begin{array}{r|l} - \cdot - = + & + \cdot + = + \\ \hline & 0 \end{array}$$

Die Gesamtheit der positiven Zahlen bildet hinsichtlich der Multiplikation eine in sich abgeschlossene Gruppe, während jene der negativen Zahlen diese Eigenschaft nicht hat.

Im menschlichen Körper haben wir im Gegensatz von vorne und hinten den Ausdruck für dieses Prinzip.

Die dritte Betrachtungsart, die Inversion oder Umstülpung, begegnet einem gleichfalls in unzähligen Gestalten, am einfachsten bei der wechselseitigen Abbildung des Äußeren und Inneren eines Kreises. Liegt ein solcher mit dem Radius 1 vor, so wird durch die Beziehung $r' = \frac{1}{r}$, wobei $r' = oP'$, $r = oP$ ist, jeder äußere Punkt in einen inneren und umgekehrt übergeführt. Ich kann auf diese Art auch jede beliebige Figur in eine entsprechende abbilden, insbesondere die unendlich ferne Gerade



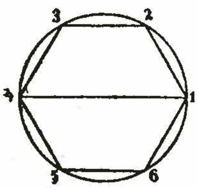
der Ebene auf den Punkt o. Auch für diese Beziehung haben wir einen organischen Ausdruck im menschlichen Körper, nämlich im Verhältnis von oben und unten, vom Kopf- oder Nervensinnesmenschen zum Gliedmaßen- oder Stoffwechselmenschen. Ein tieferes Eingehen z. B. auf die Gesetze der Metamorphose im Knochenbau des Menschen läßt tatsächlich erkennen, daß die Schädelknochen durch Umstülpung der Röhrenknochen der Gliedmaßen hervorgehen. Auf eine ähnliche Umbildung von Wirbel in Schädelknochen hatte schon Goethe hingewiesen, doch war ihm das Gesetz dieser Umbildung noch nicht vollkommen klar geworden.

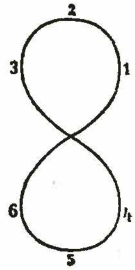
Es handelt sich also darum, diese drei Grundrichtungen oder Prinzipien des Denkens sich bei allem Mathematisieren bewußt zu machen und vor allen Dingen Denkfehler durch Verwechslung zweier derselben zu vermeiden. Ein solcher Fehler der Verwechslung der beiden ersten Prinzipien, der Symmetrie und Kontrarität oder, wie wir auch sagen können, der räumlichen Vertauschbarkeit und der zeitlichen Gegenüberstellung, welch letztere insbesondere in Bewegungsvorgängen zum Ausdruck kommt, liegt vor, wenn in der modernen Relativitätstheorie, aus der Relativität eines bewegten Systems in bezug auf ein anderes einfach die vollkommen symmetrische Vertauschbarkeit der beiden Systeme miteinander ohne Rücksicht auf die realen Vorgänge gefolgert wird. Es liegt hier eine schwer durchschaubare Vermengung von räumlicher Symmetrie und zeitlicher Kontrarität vor, deren Wurzel in der üblichen Darstellung und Messung zeitlicher Größen durch räumliche Wege liegt.

Neben diesen allgemeinen, dem ganzen Bau der Mathematik strukturgebenden Gesichtspunkten, treten noch solche, welche die einzelnen Zweiggebiete beleben. So kann insbesondere eine Vertiefung und Entwicklung des Zahlbegriffs angebahnt werden.

Wenden wir den Zählakt auf eine Reihe gleichartiger Objekte an, so gelangen wir zur Reihe der natürlichen, ganzen Zahlen, die zunächst durchaus homogen fortlaufend, lauter gleichberechtigte, undifferenzierte Elemente enthält, die wie tote Mineralien nebeneinander zu liegen scheinen.

Bringen wir jedoch in den Zählakt einen Rhythmus hinein, betonen wir etwa die erste, siebente, dreizehnte Zahl, so haben wir dadurch die Reihe der Zahlen in Gruppen zusammengefaßt, innerhalb deren schon die einzelnen Zahlen eine differente Lage einnehmen, jedoch wo die Zahl-Gruppen zunächst noch gleichwertig nebeneinander zu liegen kommen.





Als Bild für eine solche Zählart kann z. B. die Punktfolge der Ecken eines regelmäßigen Sechseckes gelten; oder die Bogenteile einer Lemmiskate. Bei der Rückkehr zum Ausgangspunkt 1 ist eine Zahlgruppe erledigt, die nächstfolgende verläuft dann in gleicher Art wie die vorhergehende. Aber auch dieser rhythmische, periodenhafte Zahlbegriff ist noch nicht der endgültige für die natürlichen Zahlen. Vereinige ich das fortlaufende Element der ersten Zählart mit dem periodischen der zweiten, so gelange ich dazu, bei der Rückkehr nach 1 nicht denselben Punkt zu ergreifen, sondern einen darüberliegenden, so daß also der Zahl 7 ein neuer Punkt oberhalb von 1 entspricht, und somit nicht bloß eine ebene Kreis- oder Lemmiskatenlinie beim Durchlaufen der Punkte beschrieben wird, sondern eine aufwärtssteigende Schraubenlinie. Dadurch werden nunmehr die einzelnen Zahlgruppen voneinander unterschieden und somit jeder einzelnen Zahl eine ausgezeichnete Stellung in der Zahlreihe zugewiesen. Wir kommen dadurch zum individuellen Zahlbegriff, zur gesonderten Erfassung jeder einzelnen Zahl hinsichtlich jener Eigenschaften, die ihr, und nur ihr allein zukommen. In den Kongruenzen der modernen Zahlentheorie, sowie in den eigentümlichen Punktbeziehungen der Riemannschen Flächen haben wir Ansätze zur Erfassung der rhythmischen Zahlbeziehungen, die jedoch eigentlich erst im Ausbau einer gegenwärtig verklungenen Wissenschaft, der Zahlenmystik, ihre organische Ausgestaltung finden würden.

Haben wir so versucht, die Vertiefung des Begriffs der ganzen Zahl aus dem Prinzip der Wiederholung und Steigerung abzuleiten, so führt die Relation zweier verschiedener Zählungen zu den Verhältniszahlen, die im Gegensatz zu den benannten Zahlen der ursprünglichen Zählungen unbenannte Zahlen sind. Wir können von diesen Verhältnis- oder Bruchzahlen weiter aufsteigen zu jenen eigenartigen Gebilden, die aus dem Verhältnis solcher Brüche hervorgehen, also aus dem Verhältnis unbenannter Zahlen.

Man faßt diese auch schlechthin als Brüche auf, obwohl hier eigentlich begrifflich Neues vorliegt und ein wirkliches Verständnis des Wesens der Doppelbrüche oder Doppelverhältnisse noch durchaus ausständig ist.

Von einer ganz anderen Seite erfließen jene Erweiterungen des Zahlbegriffs, die zu den irrationalen und imaginären Zahlen führen. Die ersteren entstehen aus dem Bedürfnis, das Stetig-Kontinuierliche des zeitlichen Verlaufes in die bisher lückenhafte, diskrete Zahlenreihe aufzunehmen; die letzteren aus der Möglichkeit und auch Notwendigkeit, den räumlichen Richtungsbegriff durch Zahlgrößen auszudrücken. Aber nun erweist sich die hier gepflegte organische Betrachtungsart auch in ihrer heuristischen Bedeutung. Sie führt nämlich zu einer dritten Erweiterungsmöglichkeit des Zahlbegriffs, die in gewissem Sinne eine Synthese der beiden ersten Erweiterungen darstellt. Sie führt zu raumzeitlichen oder Geschwindigkeitsgrößen, die als organische Verallgemeinerungen der imaginären Zahlen, als überimaginäre Zahlen sich darstellen. Diese wurden vom Vortragenden in einer eigenen Arbeit behandelt, welche in nächster Zeit veröffentlicht werden soll.

Inwiefern die in der projektiven Geometrie liegenden Ansätze einer organischen, lebendigen Behandlung geometrischer Probleme im geisteswissenschaftlichen Sinne weiter geführt werden können, dies kann aus dem vorangehenden Vortrag Dr. Steiners entnommen werden. Es soll hier kurz hinzugefügt werden, daß ja die Bedeutung der projektiven Behandlung einerseits in der polaren oder dualen Gegenüberstellung entsprechender geometrischer Gesetze liegt, anderseits in der eigentümlichen Einbeziehung der unendlich fernen Elemente in die geometrische Betrachtung.

Es wird ein Ausbau der projektiven Geometrie einerseits im Aufsteigen von den polaren Gegensätzen zu deren höherer Einheit zu suchen sein, anderseits in der Einbeziehung der unendlich fernen Elemente auch bei physikalischen Problemen. Dies letztere würde zu einer neuen Wissenschaft führen, nämlich zu einer projektiven Physik.

Vor allen Dingen ist jedoch für eine geistgemäße Weiterbildung des Mathematisierens erforderlich, daß man nicht bloß ausschließlich die formale Seite desselben betreibe, bei welcher Tätigkeit man sich, nach einem mehr oder weniger gelungenen Ansatz, den automatischen Rechenregeln willenlos überläßt, sondern daß man bei allen mathematischen Operationen mit dem menschlichen Ich wirklich dabei sei, und durch dieses bewußte Gestalten der Denkformen sich durcharbeite zu einem lebendigen Ergreifen der Wirklichkeit.